高三数学复习要抓实三个环节

王先进　（江苏省丹阳市教育研究与培训中心　212300）

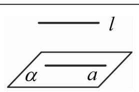
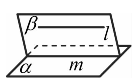
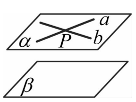
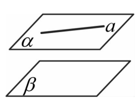
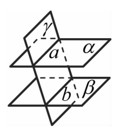
如何提高高三数学复习的质量是广大教育工作者需要研究的课题.高三数学复习切忌急功近利,要把提高学生的数学水平和数学能力放在首要位置.根据我们多年从事毕业班教学的经验以及与广大一线教师的交流,体会到:抓实知识梳理、解题教学、作业练习是提高数学复习质量十分重要的三个环节.今将我们的做法和体会介绍如下,供参考.

1　知识梳理要展示知识发生、发展过程

知识梳理是第一轮复习的基础环节.其功能是:一方面帮助学生查漏补缺,另一方面为学生构建牢固的知识网络,使相关知识在解决数学问题时被有效调用.实践表明,重视知识发生、发展过程的展示有助于实现这个目标.比如:

案例 1　复习空间平行位置关系

可以利用实物投影仪给出下表:

类别	定义	判定	性质	
线线平行				
线面平行				
面面平行				

让学生在完成填表的过程中,感悟三种平行概念的共同点(公共点个数);感悟由线线平行到线面平行,再到面面平行的知识发展过程,以及三种平行关系之间蕴含的结构联系,从而清晰地凸现三种平行关系相互依存的逻辑轮廓:一般情况下,欲证面面平行需找线面平行,欲证线面平行需找线线平行.这种完整的知识结构,具有牵一发而动全身的效能,使得大脑中的信息容易被具体情境激活.

2　解题教学要重视思路探究与优化

数学教学是以解题为中心展开的,解题教学也是高三数学复习的重要环节.其功能是:培养学生运用所学知识解决实际问题的能力,在此过程中提高学生思维水平,培养独立分析问题、解决问题的能力.

纵观当前的数学课堂,老师讲学生听的现象很普遍,认为学生是由老师教会的.教育心理学的研究却另有所见.教育心理学的研究认为:在你讲我听的过程中,学生充其量只能感知“是这样”的道理,而缺少“为什么这样”的思维透视.因此,学生在面对陌生情境时,往往难以用上老师的方法.对于那些巧思妙想,学生更是只能束之高阁.这就说明解题教学中要重视学生的思维活动,重视思路探究,重视思路的形成过程.学生在自主探究思路的过程中,不仅仅是完成一道题目,更是宝贵的生命历程,心智的参与过程可使学生深切感知思想方法的来龙去脉.探究过程中思维的调控、优化,不仅是能力的提高,更是对学习自信心的激扬.

例 1　设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F,过 F 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点,直线 l 的倾斜角为 $60°$,$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$(图 1).(1) 求椭圆 C 的离心率;(2) 如果 $AB=\dfrac{15}{4}$,求椭圆 C 的方程.

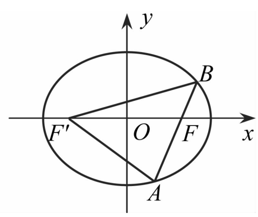


图 1

给出题目后,教师不把解题过程直接抛给学生,而是师生共同剖析条件,启示学生把握思路探究的方向,寻找解题的切入点.

(1) 依据数量特点,$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,即有 $AF=2FB$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $|y_1|=2|y_2|$,反之亦真,据此可求出 e 的值.

(2) 依据椭圆定义.设 $FB=t(t>0)$,则 $AF=2t$.设左焦点为 F',则 $|BF'|=2a-t$,$AF'=2a-2t$,且 $\angle AFF'$ 与 $\angle BFF'$ 互为补角.在 $\triangle AFF'$ 与 $\triangle BFF'$ 中运用余弦定理,可求得 e 的值.

(3) 利用第二定义.尽管椭圆第二定义不在教学要求之内,但是若教学中充分利用

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 以及 $|x-\frac{a^2}{c}|$ 的几何意义,引入第二定义应是水到渠成的事,从而可以简洁地获取 e 的值.

明确了解题方向后,再放手让学生探究具体途径,有利于学生产生独立见解,克服依赖思想,改变眼高手低的毛病,真正领悟解决问题的方法.巡视后,利用投影仪集中展示学生中的做法如下:

思路1 利用数量关系.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题意不妨设 $y_1<0$,$y_2>0$.因为 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,所以 $y_1=-2y_2$.设 $l:y=\sqrt{3}(x-c)$,$c=\sqrt{a^2-b^2}$,联立 $\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-c), \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 化简得 $(3a^2+b^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0$,解得 $y_1=\frac{-\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}$,$y_2=\frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$.令 $\frac{-\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}=\frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}\times 2$,解得 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$,故 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$.又 $AB=\sqrt{1+\frac{1}{3}}\cdot|y_1-y_2|=\frac{15}{4}$,所以 $\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2+b^2}=\frac{15}{4}$.由 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$ 得 $b=\frac{\sqrt{5}}{3}a$,所以 $a=3$,$b=\sqrt{5}$,椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

思路2 利用椭圆定义.设 $FB=t(t>0)$,则 $AF=2t$,设 F' 是椭圆 C 的左焦点,根据椭圆定义,$BF'=2a-t$,$AF'=2a-2t$.又 $\angle AFF'=60°$,所以 $\angle BFF'=120°$.运用余弦定理 $\begin{cases} (2a-t)^2=FF'^2+t^2+FF'\cdot t, \\ (2a-2t)^2=FF'^2+4t^2-2FF'\cdot t, \end{cases}$ 其中 $FF'=2c$,$c=\sqrt{a^2-b^2}$,即 $\begin{cases} 4b^2=4at+2ct, \\ 4b^2=8at-4ct, \end{cases}$ 进而得 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.下同思路 1,可求得椭圆 C 的方程.(过程略)

思路3 利用准线.过点 A,B 分别作右准线的垂线,垂足为 A_1,B_1(图 2).设 $BF=t$,离心率为 e,则 $BB_1=\frac{t}{e}$,$AA_1=\frac{2t}{e}$.作 $BH\perp AA_1$,垂足为 H.在 $\mathrm{Rt}\triangle AHB$ 中,$AB=3t$,$AH=\frac{t}{e}$,$\angle BAH=60°$,则 $AB=2AH$,即 $3t=\frac{2t}{e}$,故 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.(下略)

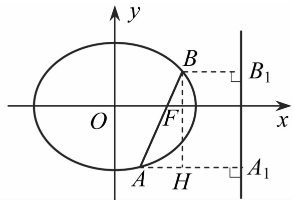


图 2

可见,不同的视角,产生不同的解题思路.通过集中展示,更有利于学生感悟解决问题的通性通法,有效提高举一反三、触类旁通的能力.在此过程中,学生容易感受到:思路 1 较直观,思路 2 明了易懂,思路 3 最简洁.解题教学不要图多求难.重视引导学生多角度审视,全方位探究,复习才能收到实效.

巩固和提高是复习课的两大特征.解题教学中既要使学生夯实基础,牢固掌握通性通法,又要使学生的思维水平和解题技能得到相应的提高.

例2 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,过原点 O 的直线交椭圆于 P,A 两点,其中点 P 在第一象限,过 P 作 x 轴的垂线,垂足为 C,连结 AC,并延长交椭圆于点 B,证明:$PA\perp PB$.

剖析 本题采自 2011 年高考江苏卷.运用常规方法,首先由题意设 $l_{PA}:y=kx$,代入椭圆方程求出 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$,则 $P(\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}},\frac{2k}{\sqrt{1+2k^2}})$,$A(-\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}},-\frac{2k}{\sqrt{1+2k^2}})$,$C(\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}},0)$.且求出 $k_{AB}=\frac{k}{2}$,再写出直线 AB 的方程,将其代入椭圆方程,求得点 B 的坐标为 $B(\frac{2(3k^2+2)}{(2+k^2)\sqrt{1+2k^2}},\frac{2k^3}{(2+k^2)\sqrt{1+2k^2}})$,通过两点的斜率公式求得 $k_{PB}=-\frac{1}{k}$,从而证得结论.如上所见,解题过程不胜其烦,稍有不慎就会出错,很多考生因此望而却步.

变换思路 因为点 P,A 关于原点对称,于是 $k_{BA}k_{BP}=-\frac{1}{2}$(能够导出此结论).设 PA 的斜率为 k,由题设容易求得 $k_{BA}=\frac{1}{2}k$,则 $k_{BP}=-\frac{1}{k}$,所以 $k_{PA}k_{BP}=k(-\frac{1}{k})=-1$,故 $PA\perp PB$.

上述证明虽然十分简单,但是运用教材未给的结论"过坐标原点的直线交椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 于 A_1,A_2 两点,P 是椭圆上异于 A_1,A_2 的任意一点,

则有 $k_{PA_1}k_{PA_2}=-\frac{b^2}{a^2}$”是不足取的. 但是,我们认为结论推导过程中所蕴含的数学思想方法是值得汲取的. 思想方法的运用能将技巧转化为学生容易接受的方法,从而使解题绽放出绚丽的色彩.

别证　由题意,设点 $P(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$,则有点 $A(-x_0,-y_0)$,点 $C(x_0,0)$,从而 $k_{PA}=\frac{y_0}{x_0}$, $k_{AC}=k_{AB}=\frac{y_0}{2x_0}$. 设 $B(x,y)$,因为点 P,B 都在椭圆上,则 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 相减得 $\frac{x^2-x_0^2}{4}=-\frac{y^2-y_0^2}{2}$.

又 $k_{AB}k_{PB}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=-\frac{1}{2}$,所以 $k_{PB}=-\frac{y_0}{x_0}$,则 $k_{PB}k_{PA}=-1$,故 $PA\perp PB$.

多么明了的思路,多么简洁的过程. 以上证明过程充分运用了解析几何设而不求以及整体求解的思想方法,有效减少了运算环节.

实践证明,思维水平的提升将极大地推进学生运算技能的提高. 解题教学中适时揭开“技巧”的神秘面纱,揭示其蕴含的思想方法,对于提高学生的解题能力大有裨益.

3　作业练习要引导学生进行解题反思

完成作业,检测训练,都是通过学生实践提高解题能力的手段. 其中题目的选编、容量的控制对提高练习的效益很重要. 但是,引导学生自觉进行解题反思,深化思维透视,对于提高解题能力更为重要.

3.1　引导学生反思导致解题错误的根源

学生在解答数学问题时出现错误是难免的,但是纠正错误却非易事,有些问题反复订正仍会出错. 我们在教学实践中体会到引导学生反思致错根源,从源头上遏制错误才能从根本上减少解题错误.

比如,应用等比数列求和公式时,学生容易遗漏公比 $q=1$ 的情况. 诊断病因,根源在于教者在推导公式的过程中,由 $(1-q)S_n=a_1(1-q^n)$ 得 S_n 时,包办代替,缺乏学生认知活动. 从源头上防范错误的关键是让学生明白为什么要分 $q\neq 1$ 和 $q=1$ 两种情况讨论的原因,从而得出完整的公式 $S_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1,\\ na_1, & q=1.\end{cases}$ 学生在切身体验中进行深刻的思维认知,这是回避错误的重要措施.

如若错误已经形成,则设置配套陷阱,进行受挫训练,往往能促使学生强化辨析,走出误区,有效防范重蹈覆辙.

3.2　引导学生反思解题思路

学生拿到题目,往往急于求成,一旦有了思路,就忙于完成任务,做完即丢. 往往不去反思“为什么要这样想,还能怎样想”,满足于一得之见,水平难有提高,而引领学生反思解题思路,效果大不相同.

比如,解答例 1 中,当学生给出证法 1 时(虽然此法最为简单),应及时引导学生反思“为什么这样想”.(推动理性思维)继续追问:(1) 你能利用 $\triangle BFF'$ 与 $\triangle AFF'$ 的特殊关系获得解题思路吗?(2) 你还有别的解题思路吗?(拓展思维空间)

这样的反思过程强化了理性思考,有效促进了学生对基本方法的认知理解,提高了灵活应用能力,进而做到灵活运用数学思想方法战胜题海战术.

3.3　引导学生反思解题过程

解题过程的繁、简程度是决定解题成败的重要因素. 同样的思路,不同的过程,解题效果迥然不同.

比如例 2 中,当学生假设直线 PA 斜率为 k,求出直线 AB 斜率为 $\frac{k}{2}$,并得到 A,B 两点坐标后,再由两点斜率公式求 PB 斜率而举步维艰时,适时启发学生:证明 PA 与 PB 斜率之积为 -1,方向是正确的. 是否还有更简洁的途径呢? 观察点的特征(P,A 两点关于原点对称,点 P,A,B 都在椭圆上)能否尝试新的途径? 此时学生就不难利用对称性以及点在椭圆上的特征,给出别证.

学生处在欲进不得欲罢不能之时,引导其改变途径,走出困境,容易得到成功的快乐体验. 此时学生收获的不仅是解题技能的提高,更是思维水平的提升和数学兴趣的激扬,数学学习就会由苦变乐.

知识梳理、解题教学、作业练习是数学复习的三个基本环节. 遵循规律,认真抓好每一个环节,切实提高每个环节的效益是提高高三数学复习质量的关键. 本文抛砖引玉,期望引起广大同仁的关注.