“形”中挖“同”　“数”中寻“构”
——记“同构思想”在解析几何中的应用

常梨君　金一鸣　(江苏省常州市田家炳高级中学　213001)

摘　要　本文从 2022 年新高考Ⅰ卷解析几何题入手，以优化运算为主要诉求，以几何特征的形似引入“同构”. 在剖析高考和模考题的基础上总结出“同构法”解决解析几何问题的流程，提炼出 4 种常见的同构点，并阐明了“同构思想”的引入对数学高水平运算培育的意义.

关键词　同构；解析几何

文章编号　1004-1176(2022)11-0069-04

平面解析几何是高中数学的一大重点和难点，对数学运算有着较高的要求，学生普遍具有“畏算”心理. 而新高考背景下对运算能力提出了高要求，运算是大量的，而且是实的，不仅要有精细迅速的运算技能，还需依据条件和目标不断确定和调整运算方法和路径，在运算中彰显能力. 现实与目标的反差，促使我们重新审视解析几何运算，从新的视角切入，引入新思想，另辟蹊径，才会“另有一番天地”.

1　优化解题，联想“同构”

问题 1　(2022 年新高考Ⅰ卷 21 题) 已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 上，直线 l 交双曲线 C 于 P,Q 两点，直线 AP,AQ 的斜率之和为 0. 求 l 的斜率.

答案：双曲线方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1, k=-1$.

此题是 21 题的第一问，变量多，运算量大，学生在考试过程中不易做对. “由双曲线上的一点引两条斜率和为零的直线，则这两条直线与双曲线交点连线的斜率为定值”，这是本问的出题依据. 学生常见的做法有如下两种：

解析 1　设直线 $l_{PQ}:y=kx+m, P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$，将条件 $k_{AP}+k_{AQ}=0$ 坐标化消 y，得 $k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{kx_1+m-1}{x_1-2}+\frac{kx_2+m-1}{x_2-2}=\frac{2kx_1x_2+(m-1-2k)(x_1+x_2)-4(m-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$. 联立直线 PQ 与双曲线方程，利用韦达定理化简得 $4(k+1)(m+2k-1)=0$，分类讨论得 $k=-1$.

解析 2　易知直线 AP,AQ 的斜率存在，设 $l_{AP}:y-1=k_1(x-2), l_{AQ}:y-1=k_2(x-2)$，联立双曲线方程，求得 $P\left(\frac{-4k_1{}^2+4k_1-2}{1-2k_1{}^2},\frac{6k_1{}^2-4k_1+1}{1-2k_1{}^2}\right)$，$Q\left(\frac{-4k_2{}^2+4k_2-2}{1-2k_2{}^2},\frac{6k_2{}^2-4k_2+1}{1-2k_2{}^2}\right)$，结合条件 $k_1+k_2=0$ 得 $k_{PQ}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4k_1-k_1(x_1+x_2)}{x_2-x_1}$，代入坐标得 $k_{PQ}=-1$.

这两种解法分别体现了解析几何解题的两种思想：“设而不求”与“设而求之(点 P,Q 可求)”，学生常是有思路但算不到底，反映其对数学运算的设计和选择能力偏弱. 能否优化呢？笔者注意到点 P,Q 的坐标结构相同，与“同构”似乎有着某种联系，不妨作一些尝试，对运算进行优化.

2　解析“同构”，迁移应用

“同构”是抽象代数中的专业术语，指的是一个保持结构的双射. 数学中的同构式是指变量不同，但结构相同的两个表达式. 所谓用同构思想解题，它来源于一个基础结论：若 $f(x)$ 是定义在区间 D 上的增函数，则 $f(x)>f(y)\Leftrightarrow x>y$(减函数结论类似). 利用这个结论，构建同构式，抽象母函数，把函数值的关系转化为自变量的关系，脱去嵌套的外衣，实现化繁为简. 因此，“同构”的本质是构造函数的思想，对学生的高阶思维有较高的要求.

解析几何问题中，常有一些点、线具有相同的特征(如，点 A,B 在曲线 $f(x,y)=0$ 上)，将这些“形”的共性坐标化，得到的代数式结构也相同，

这为"同构法"的使用提供了可能. 本文探究了"同构思想"在解析几何中的一些妙用，以期拓展思维，培养学生抽象和化归的思维能力，提升综合素养.

3 形相似切入，寻找同构点

3.1 同构点1——二次曲线上的两个点在同一条直线上

方向1 问题1中由于点P,Q坐标的复杂性导致解析2中$k_{PQ}=-1$的化简较复杂，不如反其道而行之：设直线$l_{PQ}:y=kx+m$，将点P,Q坐标代入得$\begin{cases}\dfrac{6k_1^2-4k_1+1}{1-2k_1^2}=k\,\dfrac{-4k_1^2+4k_1-2}{1-2k_1^2}+m,\\ \dfrac{6k_2^2-4k_2+1}{1-2k_2^2}=k\,\dfrac{-4k_2^2+4k_2-2}{1-2k_2^2}+m,\end{cases}$

化简得$\begin{cases}(6+4k+2m)k_1^2-(4+4k)k_1+2k-m+1=0,\\(6+4k+2m)k_2^2-(4+4k)k_2+2k-m+1=0,\end{cases}$

即k_1,k_2为方程$(6+4k+2m)x^2-(4+4k)x+2k-m+1=0$的两个不等实根，

由韦达定理$k_1+k_2=\dfrac{4+4k}{6+4k+2m}=0$得$k=-1$.

方向2 从点P,Q既是直线与双曲线的交点，又是两直线的交点入手，"算两次"：

联立$\begin{cases}y-1=k_1(x-2),\\x^2-2y^2=2\end{cases}$得$x_P=\dfrac{-4k_1^2+4k_1-2}{1-2k_1^2}$；再联立$\begin{cases}y-1=k_1(x-2),\\y=kx+m\end{cases}$得$x_P=\dfrac{2k_1+m-1}{k_1-k}$.

则$\dfrac{-4k_1^2+4k_1-2}{1-2k_1^2}=\dfrac{2k_1+m-1}{k_1-k}$，化简得$(2+4k+2m)k_1^2-(4+4k)k_1+2k-m+1=0$ ①，

同理得$(2+4k+2m)k_2^2-(4+4k)k_2+2k-m+1=0$ ②，

由①②可得k_1,k_2为方程$(2+4k+2m)x^2-(4+4k)x+2k-m+1=0$的两个不等实根，

由韦达定理$k_1+k_2=\dfrac{4+4k}{2+4k+2m}=0$得$k=-1$.

点评 点P,Q的坐标是关于k_1,k_2的二次式，且结构相同，代入直线PQ方程，得到了两个同构式，以k_1,k_2为主元整理，抽象出母方程(一元二次方程$f(x)=0$)，由韦达定理得到结果. 设而不求，避免了繁琐运算. "双曲线上的两个点在同一条直线上"这一"形似"，是构造同构式的关键. 已知点P,Q坐标的前提下，"设直线、点代入"和"算两次"这一视角的转换也是难点.

3.2 同构点2——两个点在同一条二次曲线上

问题2 如图1，已知椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$，过椭圆C的右焦点F的直线l交椭圆于A,B两点，交y轴于点M，若$\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，求证：$\lambda_1+\lambda_2$为定值.

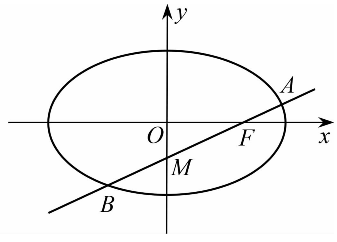

图1

常用解法 设直线$l:x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M\left(0,-\dfrac{2}{m}\right)$. 由$\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，坐标化得$\begin{cases}x_1=\lambda_1(2-x_1),\\y_1+\dfrac{2}{m}=-\lambda_1y_1\end{cases}$①和$\begin{cases}x_2=\lambda_2(2-x_2),\\y_2+\dfrac{2}{m}=-\lambda_2y_2\end{cases}$②. 目标导向将$\lambda$用$y$表示，$\lambda_1+\lambda_2=\left(-1-\dfrac{2}{my_1}\right)+\left(-1-\dfrac{2}{my_2}\right)=-2-\dfrac{2(y_1+y_2)}{my_1y_2}$，联立直线$l$与椭圆方程消$x$，得$(m^2+5)y^2+4my-1=0$，由韦达定理代入，得$\lambda_1+\lambda_2=-10$.

能否用"同构"解答呢？我们作如下联想：①由"$\lambda_1+\lambda_2$"联想到什么？(韦达定理)→②如何构造λ的二次方程？→③题中有二次式吗？(椭圆方程)→④如何构造同构方程？(点A,B在椭圆上)→⑤如何求A,B坐标？(将上述方程①②中用λ表示x,y).

略解如下：由方程①②得$A\left(\dfrac{2\lambda_1}{1+\lambda_1},\dfrac{-2}{m(1+\lambda_1)}\right)$，$B\left(\dfrac{2\lambda_2}{1+\lambda_2},\dfrac{-2}{m(1+\lambda_2)}\right)$. 将$A,B$代入椭圆方程得$\begin{cases}\dfrac{4\lambda_1^2}{5(1+\lambda_1)^2}+\dfrac{4}{m^2(1+\lambda_1)^2}=1,\\ \dfrac{4\lambda_2^2}{5(1+\lambda_2)^2}+\dfrac{4}{m^2(1+\lambda_2)^2}=1,\end{cases}$化简得

$\begin{cases}m^2\lambda_1^2+10m^2\lambda_1+5m^2-20=0,\\ m^2\lambda_2^2+10m^2\lambda_2+5m^2-20=0,\end{cases}$则 λ_1,λ_2 是方程 $m^2x^2+10m^2x+5m^2-20=0$ 的两根，由韦达定理得 $\lambda_1+\lambda_2=-10$.

点评　直线 MF 上的点 A,B(坐标结构相同) 在二次曲线(椭圆) 上，这是形似，以 λ 为主元构造出同构方程. 此法摆脱了“直线与椭圆相交、联立、韦达定理” 的固化思维，同构式以 λ 的新视角研究问题，不仅减少了大量运算，也彰显了思维的整体性和灵活性.

3.3　同构点 3—— 两条直线与二次曲线有相同位置关系

问题 3　(2019 年全国卷 III 理 21 题) 如图 2，曲线 $C:y=\frac{1}{2}x^2$，D 为直线 $y=-\frac{1}{2}$ 上的点，过 D 作曲线 C 的两条切线，切点分别为 A,B. 证明：直线 AB 过定点.

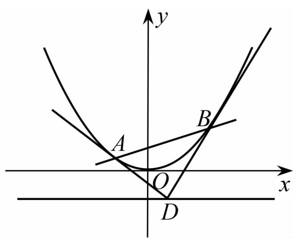

图 2

略解　设 $D\left(t,-\frac{1}{2}\right)$，$l_{AD}:y+\frac{1}{2}=k_1(x-t)$，联立 $\begin{cases}y+\frac{1}{2}=k_1(x-t),\\ y=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-2k_1x+2k_1t+1=0$ (*).

因为直线 AD 与抛物线切于点 A，所以 $\Delta=4k_1^2-4(2k_1t+1)=4k_1{}^2-8k_1t-4=0$. 且方程只有唯一根 $x_A=k_1$，即点 $A\left(k_1,\frac{1}{2}k_1^2\right)$.

同理直线 BD 与抛物线相切于点 B，可得 $\Delta=4k_2{}^2-8k_2t-4=0$，$B\left(k_2,\frac{1}{2}k_2^2\right)$. 从而 $k_{AB}=\dfrac{\frac{1}{2}k_2^2-\frac{1}{2}k_1^2}{k_2-k_1}=\dfrac{k_2+k_1}{2}$，$l_{AB}:y-\dfrac{k_1^2}{2}=\dfrac{k_2+k_1}{2}(x-k_1)$，即 $y=\dfrac{k_2+k_1}{2}x-\dfrac{k_1k_2}{2}$.

因为 $\begin{cases}4k_1^2-8k_1t-4=0,\\ 4k_2^2-8k_2t-4=0,\end{cases}$ 即 k_1,k_2 是方程 $4x^2-8tx-4=0$ 的两根，由韦达定理 $\begin{cases}k_1+k_2=2t,\\ k_1\cdot k_2=-1\end{cases}$ 得 $l_{AB}:y=tx+\frac{1}{2}$，定点为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

点评　这是抛物线中的阿基米德三角形，以极点(焦点)、极线(准线) 为载体，“联立直线与圆锥曲线，消元，由相切得 $\Delta=0$”，是判定直线与圆锥曲线相切的通法. 两条切线得到的两个判别式恰为关于 k_1,k_2 的同构式，采用整体消元，简化运算.

3.4　同构点 4—— 两条直线过同一个点

再看问题 3，开口向上的抛物线的切线问题，还可以用导数法解决.

略解　$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$y'=x$，$k_{AD}=x_1$，$k_{BD}=x_2$，则 $l_{AD}:y-y_1=x_1(x-x_1)$，$l_{BD}:y-y_2=x_2(x-x_2)$. 点 $D\left(t,-\frac{1}{2}\right)$ 代入两切线方程得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}-y_1=x_1(t-x_1),\\ -\frac{1}{2}-y_2=x_2(t-x_2),\end{cases}$ 化简 $\begin{cases}x_1t-x_1^2+y_1+\frac{1}{2}=0,\\ x_2t-x_2^2+y_2+\frac{1}{2}=0\end{cases}$ (**)，由点 A,B 在抛物线上知 $x^2=2y$，消 x^2，得 $\begin{cases}x_1t-y_1+\frac{1}{2}=0,\\ x_2t-y_2+\frac{1}{2}=0,\end{cases}$ 从而 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是方程 $tx-y+\frac{1}{2}=0$ 的两根，即点 A,B 在直线 $tx-y+\frac{1}{2}=0$ 上，则 $l_{AB}:y=tx+\frac{1}{2}$，定点为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

点评　两条切线的方程结构相同，利用点 D 在两条切线上得到同构式，(**) 式如何消元是关键. 由目标直线方程的定义出发，消 x^2，直接构建 x_1,y_1 和 x_2,y_2 满足的方程(二元一次方程 $f(x,y)=0$)，出其不意，一步到位，且直线 AB 为抛物线的切点弦方程.

利用“同构” 二元一次方程 $f(x,y)=0$ 的方法，还可以推广到圆、椭圆、双曲线切点弦方程，结论如下：

(1) 自圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作圆 C 的切线，切点为 A,B，则切点弦 AB 的方程为：$(x-a)(x_0-a)+(y-$

$b)(y_0-b)=r^2$.

（2）自椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作椭圆 C 的切线，切点为 A,B，则切点弦 AB 的方程为：$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

（3）自双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作双曲线 C 的切线，切点为 A,B，则切点弦 AB 的方程为：$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

4 总结内化，提升素养

4.1 “同构法”解题的流程

根据上述三个例子，可以概括出使用“同构法”解题的流程为：

点（或线）满足的公共特征 → 构造“同构” → 确定主元 → 抽象母方程 → 求解目标.

“同构法”解题是由几何特征的形似，抽象出代数式的同构，利用“整体消元”解决问题. 学生在解决问题的过程中，明了同构是什么，同构能解决什么问题. 同时，“确定主元”中主元的选择很重要，需要视问题的需要而定，可以是斜率、参数和坐标等. “同是形式、构是内涵”，思想方法的改变带来了低阶数学运算的大量简化，令人拍案叫绝，对学生高阶数学运算的提升很有裨益. 同时，同构式也体现了数学的对称美、和谐美.

4.2 “同构点”的寻找

要想真正掌握并灵活运用“同构”，就必须选择好“同构点”，即同构式怎么构造？笔者分析研究整理出近年高考题中的部分“同构点”，如图 3 所示.

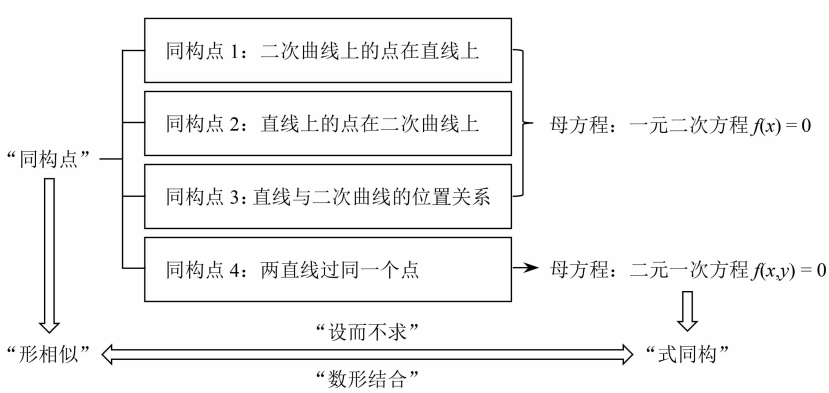

图 3

形相似是使用同构的标志，在形数转化的过程中，“同构”实现了数形的完美结合. 利用“式子结构”的整体性，实现了“设而不求”；“同构主元”的选择，突破了 x,y 的桎梏，新视角带来了不同的解题体验.

4.3 提升高水平的数学运算素养

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》要求学生具有理解运算对象、探究运算方向、选择运算方法、设计运算程序、求得运算结果等数学运算素养，并且将数学运算核心素养分为能够在熟悉的情境中了解运算对象，提出运算问题；能够在关联的情境中确定运算对象，提出运算问题；在综合情境中能够把问题转化为运算问题，确定运算对象和运算法则，明确运算方向这三个水平.

以问题 1 的“同构解法”为例，由双曲线上点 P,Q 的坐标结构的相似性，设直线方程，构造出同构式，是简化整个计算的关键步骤，对素养要求很高，是“水平三”；由同构式抽象出母方程，联系韦达定理，属于“水平二”；求点 M,N 的坐标则为“水平一”. 由几何特征到同构式的转化为后续的计算指明了方向，转化的过程中不仅需要运算能力，更需要有反向推演的能力，高水平的数学运算一定有逻辑推理的参与.

将解析几何从“联立求解”转移到“识图析图”，从繁琐的数式运算转向分析推理型运算，让学生体会更多“设而不求”的计算精髓，才能真正提升学生的运算素养，培养学生不怕算的毅力，进而将解析几何运算进行到底.